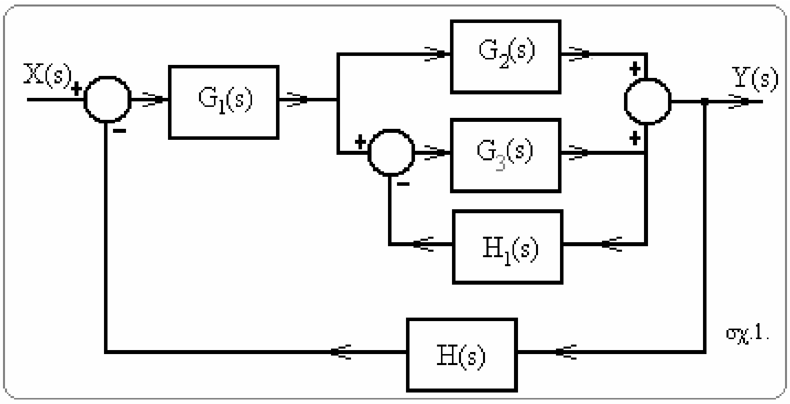
# Επανάληψη από τα ΣΑΕ.

Έστω το σύστημα του σχήματος 1. του οποίου οι επιμέρους βαθμίδες έχουν συναρτήσεις μεταφοράς




$$G_1(s) = \frac{K}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{5}{s+10}$$

$$G_3(s) = \frac{5}{10 - 4\cdot s}$$

$$H_1(s) = s$$

$$H(s) = 1$$

Σε εφαρμογή επιθυμούμε ο συντελεστής απόσβεσης να είναι μεγαλύτερος από 0,5 και μικρότερος από 0,8 (0,5<ζ<0,8).

α) [1,0] Υπολογίστε τον πεδίο τιμών του συντελεστή ενίσχυσης Κ ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση της εφαρμογής.

β) [1.0] Θεωρώντας ότι το σύστημα διεγείρεται από την συνάρτηση *X(s)=40/s.* Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος στην μόνιμη κατάσταση, όταν το Κ=1.

---

**Η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόχου είναι:**

$$F_3(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)\cdot H_1(s)} = \frac{\frac{5}{10-4\cdot s}}{1 + \frac{5}{10-4\cdot s}\cdot s} = \frac{5}{10 - 4\cdot s + 5\cdot s} \Rightarrow F_3(s) = \frac{5}{s+10}$$

$$G_{2-3}(s) = G_2(s) + F_3(s) = \frac{5}{s+10} + \frac{5}{s+10} = \frac{10}{s+10}$$

$$G_0(s) = G_1(s) + G_{2-3}(s) = \frac{K}{s}\cdot\frac{10}{s+10} = \frac{10\cdot K}{s^2 + 10\cdot s}$$

**Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου είναι:**

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\cdot H(s)} = \frac{\frac{10\cdot K}{s^2+10\cdot s}}{1 + \frac{10\cdot K}{s^2+10\cdot s}\cdot 1} = \frac{10\cdot K}{s^2 + 10\cdot s + 10\cdot K} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{10\cdot K}{s^2 + 10\cdot s + 10\cdot K}$$

**Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του συστήματος υπολογίζεται ίση με:**

$$\omega_o{}^2 = 10 \cdot K \Rightarrow \omega_o = \sqrt{10 \cdot K} \qquad rad/\sec$$

**Και ο συντελεστής απόσβεσης είναι ίσος με:**

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_o = 10 \Rightarrow \zeta = \frac{10}{2 \cdot \sqrt{10 \cdot K}} \Rightarrow \zeta = \frac{5}{\sqrt{10 \cdot K}}$$

**Ο συντελεστής ζ (0.5,0.8) υπολογίζουμε το πεδίο τιμών του συντελεστή Κ:**

$$\zeta = \frac{5}{\sqrt{10 \cdot K}} \Rightarrow \sqrt{10 \cdot K} = \frac{5}{\zeta} \Rightarrow 10 \cdot K = \left(\frac{5}{\zeta}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{1}{10} \cdot \frac{25}{\zeta^2} \Rightarrow$$

$$K = \frac{2{,}5}{\zeta^2}$$

---

- Για ζ=0,5 έχουμε

$$K = \frac{2{,}5}{\zeta^2} = \frac{2{,}5}{0{,}5^2} = \frac{2{,}5}{0{,}25} \Rightarrow \mathrm{K} = 10$$

- Για ζ=0,8 έχουμε

$$K = \frac{2{,}5}{\zeta^2} = \frac{2{,}5}{0{,}8^2} = \frac{2{,}5}{0{,}64} \Rightarrow \mathrm{K} = 3{,}9$$

---

**Η έξοδος του συστήματος στην μόνιμη κατάσταση για Κ=1 όταν διεγείρεται από την συνάρτηση X(s)=40/s, είναι:**

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = F(s) = \frac{10 \cdot K}{s^2 + 10 \cdot s + 10 \cdot K} = F(s) = \frac{10}{s^2 + 10 \cdot s + 10} \Rightarrow$$

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{10}{s^2 + 10 \cdot s + 10} = \frac{40}{s} \cdot \frac{10}{s^2 + 10 \cdot s + 10} = \frac{400}{s \cdot \left({}^2 + 10 \cdot s + 10\right)}$$

**Εφαρμόζουμε το θεώρημα της τελικής τιμής και βρίσκουμε το σφάλμα:**

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot Y(s)\right) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{400}{s \cdot \left(s^2 + 10 \cdot s + 10\right)}\right) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{400}{\left(s^2 + 10 \cdot s + 10\right)}\right) = \frac{400}{10} = 40$$

---