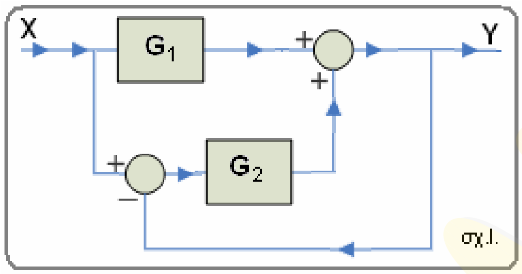
Παράδειγμα 1

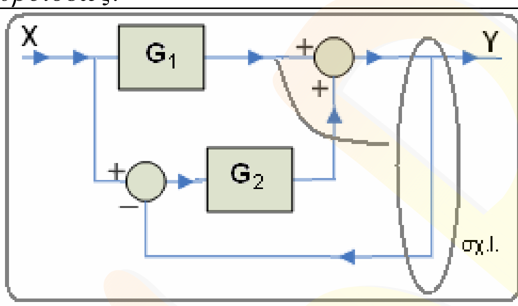
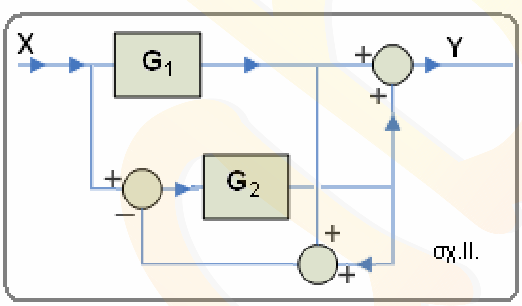
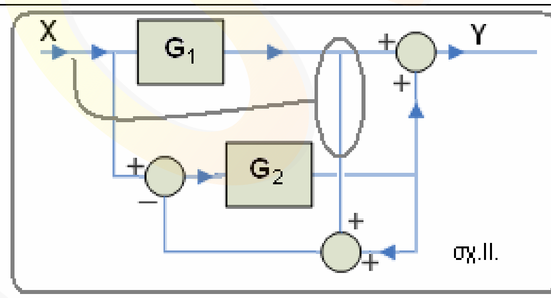
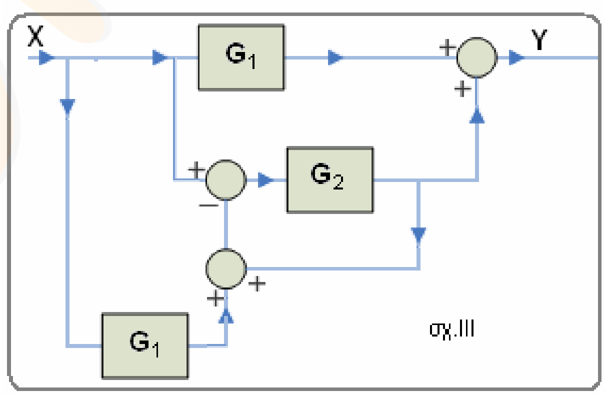
Στο παράδειγμα αυτό γίνεται ανασκόπηση της θεωρίας των ΣΑΕ, *(διαγράμματα βαθμίδων, πόλοι-ρίζες συστήματος, ευστάθεια, χρονική απόκριση, συχνοτικά διαγράμματα, ...)*

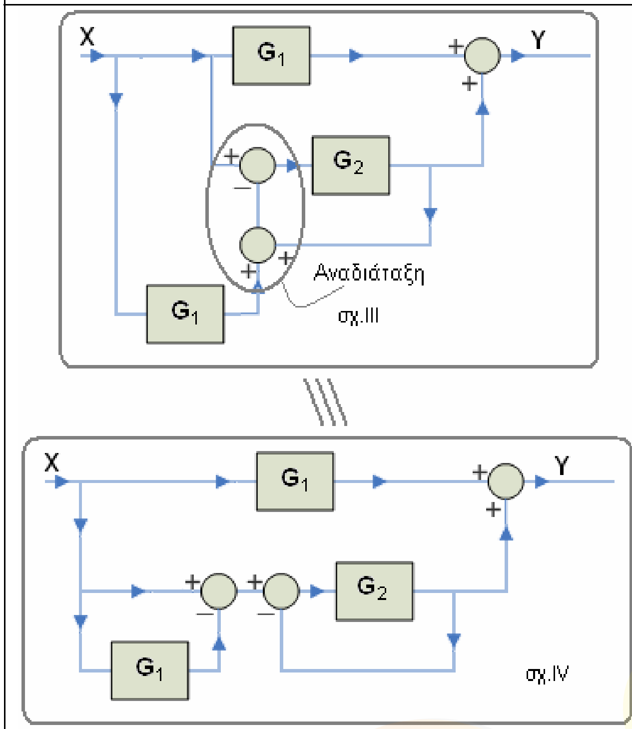
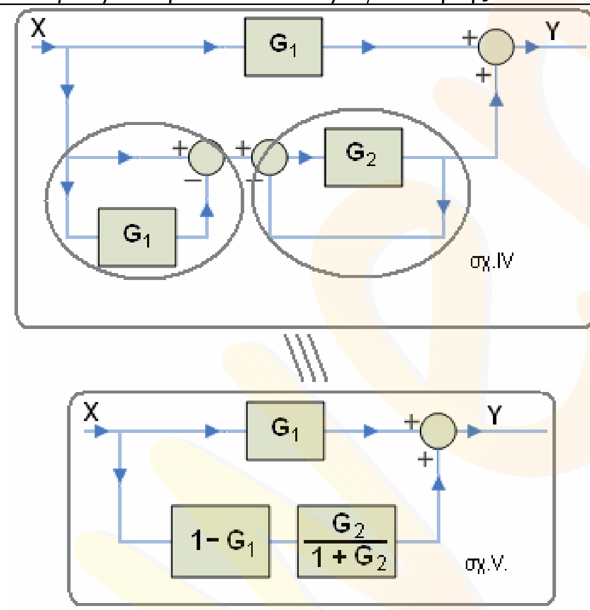
Έστω το σύστημα του επόμενου σχήματος I να υπολογισθούν

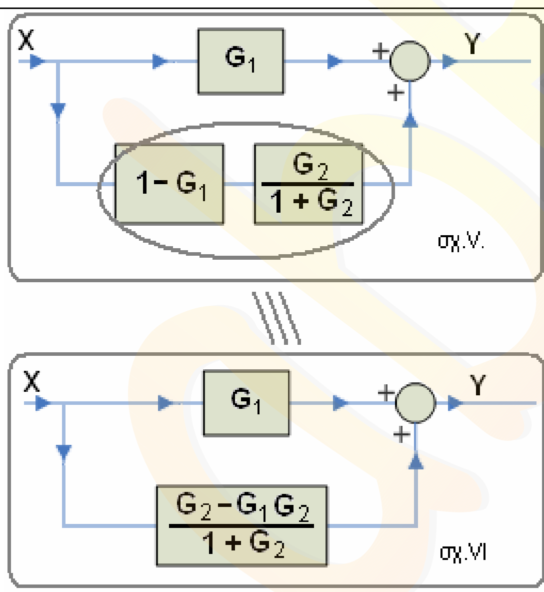
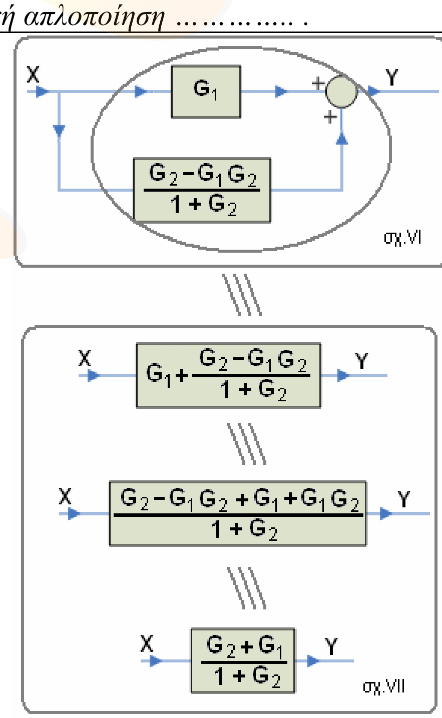
1. η συνάρτηση μεταφοράς G(s)=Y(s)/X(s).
2. η συνάρτηση εξόδου Y(s). Αν η είσοδος είναι X(s)=U(t)=1/s.



Με διαδοχικές απλοποιήσεις χρησιμοποιώντας τις γνώσεις από τα διαγράμματα βαθμίδων, έχουμε:

Βήμα 1. *Μετακίνηση σημείου λήψης, εμπρός από σημείο αθροίσεως.*	Βήμα 2. *Μετακίνηση σημείου λήψης, στην είσοδο βαθμίδας.*
 	 

Βήμα 3. *Αναδιάταξη σημείων αθροίσεων.*	Βήμα 4. *Σύνθεση βαθμίδων παράλληλα.* *Απομάκρυνση κλάδου ανατροφοδότησης.*
	

Βήμα 5. *Σύνθεση βαθμίδων σε σειρά.*	Βήμα 6. *Σύνθεση βαθμίδων παράλληλα* *Τελική απλοποίηση …………..* .
	

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος προκύπτει:

$$G_o(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1+G_2}{1+G_2}$$

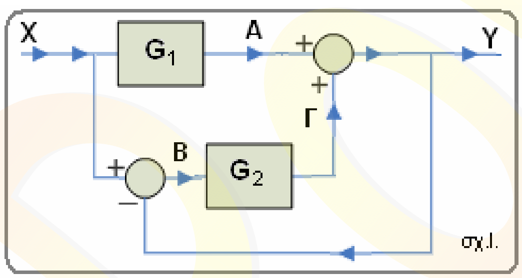
Η συνάρτηση εξόδου Y(s) γνωρίζοντας την συνάρτηση εισόδου X(s)=1/s είναι,

$$G_o(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1+G_2}{1+G_2}\Rightarrow$$
$$Y(s)=X(s)\cdot\frac{G_1+G_2}{1+G_2}=\frac{1}{s}\cdot\frac{G_1+G_2}{1+G_2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{G_1+G_2}{1+G_2}$$

Αναλυτική εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς.

Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε με αναλυτική επίλυση να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος,



Αναλύοντας το σύστημα και με βάση το σχήμα I προκύπτει,

$$Y=A+\Gamma\Rightarrow Y=X\cdot G_1+B\cdot G_2\Rightarrow Y=X\cdot G_1+(X-Y)\cdot G_2\Rightarrow$$
$$Y=X\cdot G_1+X\cdot G_2-Y\cdot G_2\Rightarrow$$
$$Y+Y\cdot G_2=X\cdot(G_1+G_2)\Rightarrow$$
$$Y(1+G_2)=X\cdot(G_1+G_2)\Rightarrow$$
$$Y=X\cdot\frac{G_1+G_2}{1+G_2}$$

$$G_o=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1+G_2}{1+G_2}$$

Συμπερασματικά, επιβεβαιώνουμε το αποτέλεσμα, ενώ για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι πολύ ευκολότερο με την αναλυτική μέθοδο η εύρεση συνάρτησης μεταφοράς.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι σε σύνθετα συστήματα είναι ευκολότερη η διαδοχική απλοποίηση με την χρήση των μετασχηματισμών και κανόνων που διέπουν τα διαγράμματα βαθμίδων.

Αν γνωρίζετε ότι οι συναρτήσεις $G_1(s)$ και $G_2(s)$ είναι,

$$G_1(s) = \frac{2}{s+2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+4}$$

Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος τόσο στο πεδίο του Laplace όσο και στο πεδίο του χρόνου όταν, η είσοδος X(s)=U(t=1/s.

Με την βοήθεια του προγράμματος MatLab επιβεβαιώστε τα ανωτέρω (αποτυπώστε το σύνολο των αποκρίσεων στις εισόδους και εξόδους των βαθμίδων και μελετήστε αυτές καταγράφοντας τα συμπεράσματα σας)

Αντικαθιστώντας προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος,

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_2} = \frac{\dfrac{2}{s+2} + \dfrac{1}{s+4}}{1 + \dfrac{1}{s+4}} = \frac{\dfrac{2\cdot(s+4)+(s+2)}{(s+2)\cdot(s+4)}}{\dfrac{(s+4)+1}{s+4}} \Rightarrow$$

$$G_o(s) = \frac{(2\cdot(s+4)+(s+2))\cdot(s+4)}{(s+2)\cdot(s+4)\cdot(s+5)} = \frac{2\cdot(s+4)+(s+2)}{(s+2)\cdot(s+5)} \Rightarrow$$

$$G_o(s) = \frac{2\cdot s + 8 + s + 2}{s^2 + 5\cdot s + 2\cdot s + 10} = \frac{3\cdot s + 10}{s^2 + 7\cdot s + 10}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G_o(s) = \frac{3\cdot s + 10}{s^2 + 7\cdot s + 10}$$

Η έξοδος του συστήματος με μοναδιαία διέγερση είναι:

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = X(s)\cdot G_o(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{3\cdot s + 10}{s^2 + 7\cdot s + 10}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{3\cdot s + 10}{s^2 + 7\cdot s + 10}$$

Η τελική τιμή στην μόνιμη κατάσταση της εξόδου είναι:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{3\cdot s + 10}{s^2 + 7\cdot s + 10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$$

Ανάλυση με την βοήθεια του προγράμματος MatLab.

1. Ανάλυση της συνάρτησης

$$G_o(s) = \frac{3 \cdot s + 10}{s^2 + 7 \cdot s + 10} = \frac{3 \cdot s + 10}{s^2 + 7 \cdot s + 10} = \frac{Z(s)}{P(s)}$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και τους πόλους του συστήματος,

$$Z(s) = 3 \cdot s + 10 \qquad\qquad P(s) = s^2 + 7 \cdot s + 10$$

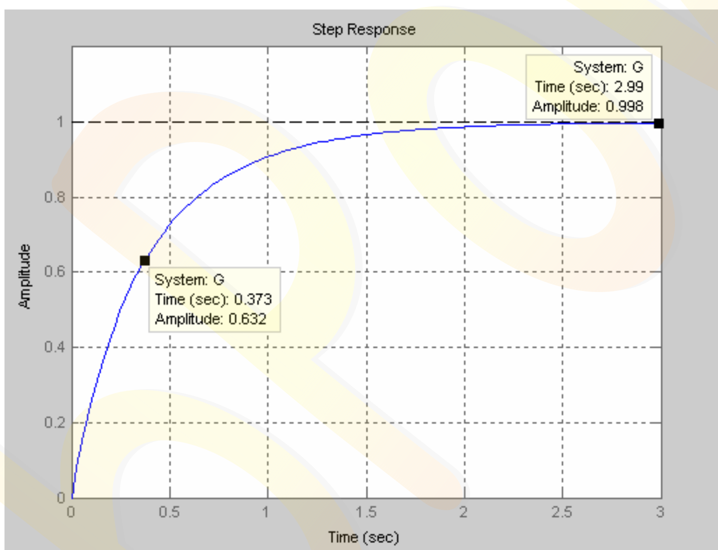
$$z_1 = -0.333 \qquad\qquad p_1 = -5$$

$$p_2 = -2$$

Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής,

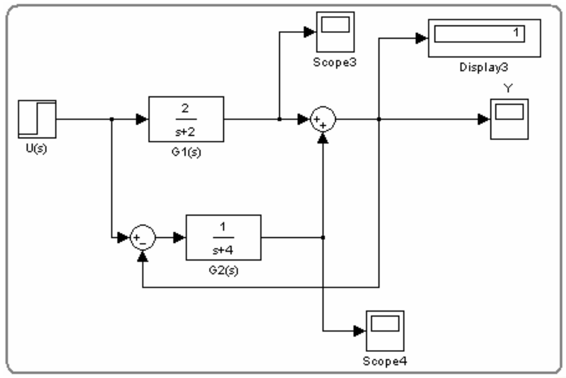
$$G_o(s) = \frac{(s + 0.333)}{(s + 5) \cdot (s + 2)}$$

Η χρονική απόκριση του συστήματος είναι,

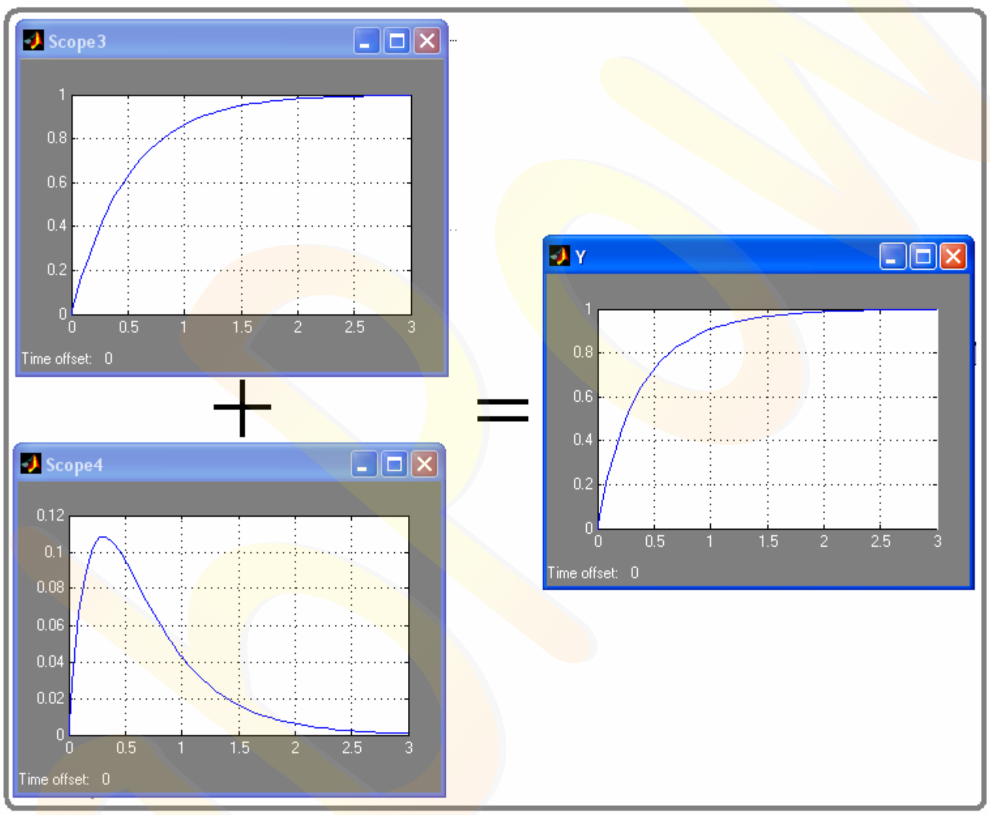


Από το γράφημα της χρονικής απόκρισης του συστήματος επιβεβαιώνουμε την τελική τιμή της έξοδος του συστήματος όταν αυτό διεγερθεί από μοναδιαία βηματική συνάρτηση, $y_{τελ}=1$ και τέλος η σταθερά χρόνου είναι $T=0,373sec$.

Με την βοήθεια του simulink δημιουργούμε το μοντέλο του συστήματος όπως αυτό μας περιγράφεται στο σχήμα Ι.



Στην επόμενη εικόνα φαίνονται οι καταγραφές στις εξόδους των βαθμίδων και του συστήματος.



Συμπεράσματα.

a. Το σύστημα με δύο πραγματικούς πόλους έχει χρονική απόκριση η οποία ορίζεται από το πόλο που βρίσκεται πλησιέστερα στο μηδέν *(p_1=-2 επομένως σταθερά χρόνου του όρου αυτού Τα=0,5sec).*
b. Η βαθμίδα $G_2(s)$ επηρεάζει μόνο την μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος, αυξάνοντας την ταχύτητα του.